АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНЫЙ ЦЕНТР БИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ПРЕПРИНТ

А.М.МОЛЧАНОВ

# АСИМПТОТИКА МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Уравнение Власова-Хинчина

ПУЩИНО - 1987

Изучаются модельные статистические суммы. Найден главный член асимптотики при N >> 1

Ответ записан в виде функционала от решения уравнения Власова-Хинчина.

## Введение.

Для модельных статистических сумм метод Хинчина приводит к замене переменных в интеграле, определяющем статистическую сумму. Размерность возникающего интеграла оказывается фиксированной (не зависящей от N):

$$\int\limits_{x_1}\ldots\int\limits_{x_N} e^{-\beta G(x_1,\ldots,x_N)}\,dx_1\ldots dx_N=\int\limits_E\int\limits_\Gamma e^{-\beta G(E)+\tau E+N\ln\Phi(\tau)}dE\,d\tau$$

Большое число N при таком преобразовании из номера последней компоненты превращается в параметр нового "квазигамильтониана" и становится множителем перед функцией $\ln\Phi(\tau)$ в показателе экспоненты что позволяет применить метод перевала к вычислению возникающего интеграла. Уравнения для седловой точки оказываются системой нелинйных интегральных уравнений для нескольких неизвестных. Это – векторное уравнение Хинчина.

Систему уравнений для чисел можно записать в виде одного уравнения для функции. Оно оказывается аналогом уравнения Власова для стационарных состояний. Естественно, поэтому назвать получающееся уравнение – уравнением Власова-Хинчина.

## n° 1. Метод перевала.

Применим к найденному интегралу метод Лапласа. Показатель экспоненты в интеграле обозначим одной буквой $\Sigma$,

$$\Sigma(E,\tau) = -\beta G(E) + \tau E + N\ln\Phi(\tau). \qquad (1)$$

Точка перевала (стационарная точка функции $\Sigma$) определяется, как известно, из условия обращения в нуль градиента $\Sigma$,

$$\frac{D\Sigma}{DE} = 0, \qquad \frac{D\Sigma}{D\tau} = 0. \qquad (2)$$

Вектор E имеет компоненты A и $Q^\mu$,

$$E = \begin{vmatrix} A \\ Q^\mu \end{vmatrix} \qquad (3)$$

а сопряженные к ним (в преобразовании Лапласа) интенсивности мы обозначим, соответственно, $\alpha$ и $\tau$ :

$$\tau = (\alpha, \tau_\mu) \tag{4}$$

В этой (более подробной) записи имеем:

$$\Sigma = -\vartheta \left[ A + \frac{1}{2} B_{\mu\sigma} Q^\mu Q^\sigma \right] + \sigma A + N \ln \Xi(\vartheta, \tau), \tag{5}$$

и, соответственно, уравнения точки перевала приобретают вид:

$$\frac{D\Sigma}{DA} = -\vartheta + \alpha = 0, \qquad \frac{D\Sigma}{D\alpha} = A + N \frac{D \ln \Xi}{D\alpha} = 0 \tag{A}$$

$$\frac{D\Sigma}{DQ^\mu} = -\vartheta B_{\mu\sigma} Q^\sigma + \tau_\mu = 0, \qquad \frac{D\Sigma}{D\tau_\mu} = Q^\mu + N \frac{D \ln \Xi}{D\tau_\mu} = 0 \tag{Q}$$

Заметим, что эти уравнения линейны по $Q$ и нелинейны по $\tau$

Первое из этих равенств,

$$\alpha = \vartheta, \tag{6}$$

имеет глубокий смысл. Оказывается, что интенсивность $\alpha$, сопряженная внешнему полю, всегда равна "внешней" (заданной) "температуре" $\vartheta$.

Второе равенство (с подстановкой $\alpha = \vartheta$ ) определяет среднее значение поля $A$ как функцию параметров интенсивности ("температур" $\vartheta$ и $\tau$ )

Вспомним определение характеристичской функции $\Xi$ ;

$$\Delta(\tau,x) = e^{-[\beta a(x) + \tau_\mu q_\mu(x)]} \qquad (7)$$

$$\Xi(\beta,\tau) = \int_x \Delta(\tau,x)\, dx, \qquad (8)$$

Выясняется, что второе из уравнений (A) имеет очень простое истолкование – оно означает, что среднее по частицам оказывается равным среднему по фазовому пространству, причем весовая функция $\Delta(\tau,y)$ именно та, которая входит в интеграл, определяющий $\Xi(\beta,\tau)$:

$$\frac{A}{N} = \frac{1}{\Xi(\beta,\tau)} \int_y a(y)\, \Delta(\tau,y)\, dy \qquad (9)$$

Мы получили результат, вполне аналогичный результату Хинчина. Доказано равенство средних по частицам и по пространству, то есть доказана XN–эргодичность. Однако акцент ситуации иной.

Это равенство – следствие свойств седловой точки. Иначе говоря аккуратное вычисление статистической суммы методом перевала а в т о м а т и ч е с к и приводит к XN–эргодичности получающегося решения.

Есть и другое серьезное различие. Величины $\tau$ подлежат еще определению, и мы увидим ниже, что соответствующее векторное уравнение, (в отличие от скалярного, которое изучал Хинчин) не всегда имеет единственное решение.

Перейдем к анализу второй (векторной) системы уравнений (Q) для переменных Q и $\tau$.

Из первого равенства находим

$$\tau_\mu = \beta\, B_{\mu\sigma}\, Q^\sigma \qquad (10)$$

Выражения для переменных Q, получаемые из второго уравнения для Q, вполне аналогичны выражению для A и имеют, разумеется, тот же смысл NX–эргодичности. Исключая их из системы имеем:

$$\tau_\mu = -\beta\, N\, B_{\mu\sigma} \frac{D \ln \Xi}{D\, \tau_\sigma} \qquad (11)$$

заметим еще раз, что величины $\tau$ входят в уравнения нелинейно (через функцию $\Xi(\tau)$. Именно это заставляет исключать $Q$ и писать уравнения для $\tau$, а не наоборот.

Вычисляя производную, имеем:

$$\frac{D\Xi}{D\tau_\mu} = \int_y q^\mu(y)\ \Delta(\tau,y)\ dy \qquad (12)$$

Подставляя это выражение в уравнение для $\tau$, мы получаем окончательно НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ для параметров $\tau$:

УРАВНЕНИЕ ХИНЧИНА

$$\tau_\mu = \rho N \frac{\int_y B_{\mu\sigma}\, q^\sigma(y)\ e^{-[\rho a(y) + \tau_\sigma q^\sigma(y)]}\, dy}{\int_y e^{-[\rho a(y) + \tau_\mu q^\mu(y)]}\, dy} \qquad (13)$$

В этом уравнении :
величины $\rho$, $N$ и $B$ с различными индексами – известные параметры; $a(y)$ и $q(y)$ с различными индексами известные (заданные) функциии и, наконец, $\tau$ с различными индексами – искомые величины:

$$\tau = F\ [\rho,\ N;\ B\ ,\ a(y),\ q\ (y)] \qquad (14)$$

Основным переменным в этой зависимости является $\rho$.

Вопрос о методах решения УРАВНЕНИЯ ХИНЧИНА выходит за рамки настоящей работы.

Ее основная цель состоит именно в сведении неразрешимой (вычислительно) – из-за огромности числа $N$ – задачи о статистической сумме к весьма трудной, но уже реальной ( вычислительно ! ) задаче решения УРАВНЕНИЯ ХИНЧИНА.

Допустим, поэтому, что искомые величины $\tau$ найдены.
Покажем, как вычислить главный член статистической суммы.

Из формулы (Z) вытекает, что

$$\ln Z = S + \dots , \tag{15}$$

где S значение $\Sigma(E,\tau)$ в точке перевала. Подставляя в ($\Sigma$) и переставляя соседние члены, имеем

$$S = \tau_\mu Q^\mu - \frac{\beta}{2} B_{\mu\sigma} Q^\mu Q^\sigma + N \ln \Xi(\beta,\tau) . \tag{16}$$

Из уравнений (Q) для седловой точки (точки перевала) видно что первое слагаемое - вспомним теорему Эйлера об однородных функциях - вдвое больше второго ("вычитаемого"). Поэтому

$$S = \frac{\beta}{2} B_{\mu\sigma} Q^\mu Q^\sigma + N \ln \Xi(\beta,\tau) \tag{17}$$

Подставляя выражения для Q через функцию $\Xi(\beta,\tau)$, (точнее ее производные), получаем:

$$S = \frac{\beta N^2}{2} B_{\mu\sigma} \frac{D \ln \Xi}{D\tau_\mu} \frac{D \ln \Xi}{D\tau_\sigma} + N \ln \Xi(\beta,\tau). \tag{18}$$

Это уже ответ, ибо S выражено через найденные (по предположению) величины $\tau$.

Однако в некоторых задачах полезно выразить ответ прямо через интегралы. В этом случае имеем такую форму ответа,

$$S = \frac{\beta N^2}{2} \langle b(x,y) \rangle + N \ln \Xi(\beta,\tau), \tag{S}$$

где

$$\Xi(\beta,\tau) = \int_Y \Delta(\tau,y)\, dy , \tag{$\Xi$}$$

а среднее значение $\langle b \rangle$ выражается через двойной интеграл

$$\langle b(x,y) \rangle = \frac{\iint\limits_{xy} b(x,y)\ \Delta(\tau,x)\ \Delta(\tau,y)\ dxdy}{\iint\limits_{xy} \Delta(\tau,x)\ \Delta(\tau,y)\ dxdy} \qquad \langle b \rangle$$

В приведенных выше формулах $\tau$ есть решение уравнения Хинчина, которое можно записать в более компактной форме:

$$\tau_\mu = \rho N \frac{1}{\Xi} \int\limits_y B_{\mu\sigma}\ q^\sigma(y)\ \Delta(\tau,y)\ dy\ . \qquad (19)$$

Входящие в уравнение ( полезно напомнить, что оно – векторное ) функции $\Xi(\rho,\tau)$ и $\Delta(\tau,x)$ имеют следующий смысл :

$$\Xi(\rho,\tau) = \int\limits_y \Delta(\tau,y)\ dy\ , \qquad (20)$$

$$\Delta(\tau,x) = e^{-[\rho a(x) + \tau_\mu q^\mu(x)]} \qquad (21)$$

## n° 2. Уравнение Власова-Хинчина.

Уравнение Хинчина можно записать в эквивалентной форме, которая в некоторых случаях оказывается удобнее. Умножая каждое уравнение для $\tau$ на соответствующую функцию $q(x)$ и складывая равенства, получаем:

$$\tau_\mu q^\mu(x) = \rho N \frac{1}{\Xi} \int\limits_y B_{\mu\sigma} q^\mu(x)\ q^\sigma(y)\ \Delta(\tau,y)\ dy \qquad (22)$$

Полученное равенство существенно упрощается, если заметить два обстоятельства. Во-первых, стоящую под знаком интеграла сумму по индексам $\mu$ и $\sigma$ можно заменить известной функцией,

$$B_{\mu\sigma}\, q^{\mu}(x)\, q^{\sigma}(y) \equiv b(x,y). \qquad (23)$$

Во-вторых, следует заметить, что в трех местах в уравнение входит одна и та же линейная комбинация функций q(x) и q(y) отличающаяся только обозначением индексов

$$q(x,\beta) = \tau_{\mu}\, q^{\mu}(x) \equiv \tau_{\sigma}\, q^{\sigma}(x). \qquad (24)$$

Вводя это обозначение, получаем

## УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА-ХИНЧИНА

$$q(x,\beta) = \beta N \frac{\int_Y b(x,y)\, e^{-\beta a(y) - q(y,\beta)} dy}{\int_Y e^{-\beta a(y) - q(y,\beta)} dy} \qquad (25)$$

Это уравнение удобнее переписать, вводя новую искомую функцию $w(\beta,x)$,

$$q(x,\beta) = \beta N\, w(\beta,x) \qquad (26)$$

Смысл введения $w(\beta,x)$ состоит в нормировке решения на величину взаимодействия, ибо $w(\beta,x)$, как мы увидим чуть ниже есть просто среднее ( по "чужому" аргументу ) от функции b(x,y).

Уравнение для w(x) имеет вид:

$$w(\beta,x) = \frac{\int_Y b(x,y)\, e^{-\beta [a(y) + Nw(\beta,y)]} dy}{\int_Y e^{-\beta [a(y) + Nw(\beta,y)]} dy} \qquad (w)$$

оно возникло (напомним) из уравнения Хинчина, эквивалентного, как мы видели, уравнению для перевальной точки.

Уравнение Власова–Хинчина можно переписать в более компактной и наглядной форме

$$w(\beta,x) = \frac{\int_y b(x,y)\ \Delta(\beta,y)\ dy}{\int_y \Delta(\beta,y)\ dy} \qquad (27)$$

Это равенство означает – как уже говорилось выше – что искомая функция $w(\beta,x)$ есть просто среднее от функции взаимодействия $b(x,y)$, но весовая функция – плотность распределения $\Delta(\beta,y)$ – содержит искомую функцию $w(\beta,y)$ :

$$\Delta(\beta,y) = \exp\ (\ -\beta\ [a(y)\ +\ Nw(\beta,y)]\ ) \qquad (28)$$

Отличие от уравнения Власова для стационарных состояний состоит в том, что рассматриваются произвольные функции $a(x)$ и $b(x,y)$ в фазовом пространстве одной $(x)$ и двух $(x,y)$ частиц.

Стационарное уравнение Власова, (опубликованное еще в 1948 году) соответствует частному случаю, когда компонента $x$ чисто геометрическая (и не содержит импульсов или спинов).

Далее функция $a(x)$ тождественно равна нулю ( $a(x) \equiv 0$ ), и, наконец, функция $b(x,y)$ зависит только от модуля разности пространственных координат

$$b(x,y) = K\ (\ |x-y|) \qquad (29)$$

Решение уравнения Власова–Хинчина (так же, как и решения уравнения Хинчина) позволяют выразить статистическую сумму через интегралы по фазовому пространству одной компоненты.

Выражение для S вполне аналогично уже найденному выше и может быть получено из него:

$$S = \frac{\beta N^2}{2} < b(x,y) > +\ N\ \ln\ \Xi(\beta,\tau), \qquad (30)$$

ибо меняется только форма выражения для среднего и характеристической функции:

$$\Xi(\beta,\tau) = \int_{y} \exp\{ -\beta \,[a(y) + w(y,\beta)] \}\, dy \qquad (31)$$

Весьма похоже выражение для среднего $\langle b(x,y) \rangle$,

$$\langle b(x,y)\rangle = \frac{\iint_{xy} b(x,y) e^{-\beta[a(x) + a(y) + Nw(x) + Nw(y)]} dxdy}{\iint_{xy} e^{-\beta[a(x) + a(y) + Nw(x) + Nw(y)]} dxdy} \qquad (32)$$

Среднее от взаимодействия $b(x,y)$ можно выразить также в виде интеграла по фазовому пространству только одной компоненты, если использовать решение уравнение Власова-Хинчина - функцию $w(\beta,x)$ - и заменить, следовательно, двукратный интеграл - однократным :

$$\langle b(x,y) \rangle = \frac{\int_{x} w(x,\beta) \exp\{ -\beta \,[a(x) + Nw(x,\beta)] \}\, dx}{\int_{x} \exp\{ -\beta \,[a(x) + Nw(x,\beta)] \}\, dx} \qquad (33)$$

Полученные формулы вместе с уравнением Власова-Хинчина дают замкнутый алгоритм вычисления статистической суммы в главном члене.

Эти две формы уравнений (уравнение Хинчина и уравнение Власова-Хинчина) эквивалентны, если взаимодействие $b(x,y)$ есть K-функция в некотором базисе. Однако уравнение Власова-Хинчина подсказывает идею предельного перехода и возможность освободиться от этого ограничения.

Гипотеза

Метод вычисления статистической суммы остается в силе для любой функции $b(x,y)$, для которой разрешимо уравнение Власова-Хинчина n° 3. Ветвление решений.

Рассмотрим простейший случай, когда взаимодействие $b(x,y)$ задается просто произведением

$$b(x,y) = \frac{1}{m} b(x)\ b(y), \tag{34}$$

а функция $a(x)$ тождественный нуль,

$$a(x) \equiv 0. \tag{35}$$

В этом случае $w(x)$ может быть найдено нелинейным аналогом метода неопределенных коэффициентов.

Заметим в скобках, что уравнение Хинчина может рассматриваться как приближенное решение уравнения Власова-Хинчина методом неопределенных коэффициентов.

При таком подходе, восходящем к Э.Шмидту, общая функция $b(x,y)$ аппроксимируется некоторой К-функцией – "вырожденным ядром" по терминологии теории интегральных уравнений – и возникает уравнение Хинчина. В учебнике И.Г.Петровского этот подход использован для решения уравнения Фредгольма.

Однако подробное обсуждение этого интересного вопроса выводит нас за рамки данной работы.

Итак, подставив выражение (34) для $b(x,y)$ в уравнение Власова-Хинчина, имеем:

$$w(x) = \frac{b(x)}{m} \frac{\int_y b(y) e^{-\beta N w(y)} dy}{\int_y e^{-\beta N w(y)}\, dy} = C\ b(x) \tag{36}$$

где искомая константа C ( уже только константа, а не функция w ) должна быть найдена из интегрального уравнения, получающегося после сокращения обеих частей равенства на $b(x)$ и подстановки $Cb(y)$ вместо $w(y)$:

$$C = \frac{1}{m}\,\frac{\int_Y b(y)\, e^{-\rho NC\, b(y)} dy}{\int_Y e^{-\rho NC\, b(y)}\, dy} \tag{37}$$

Заметим, что в правую часть равенства параметры входят только в комбинации $\rho NC$. Иначе говоря, уравнение может быть переписано в виде

$$mC = F\,(\rho NC), \tag{38}$$

где функция F задается формулой,

$$F(z) = \frac{\int_Y b(y)\, e^{-z\, b(y)} dy}{\int_Y e^{-z\, b(y)} dy} \tag{39}$$

Еще выразительнее выглядят формулы, если вспомнить определение характеристической функции $\Xi$,

$$\Xi(z) = \int_Y e^{-z\, b(y)}\, dy, \tag{40}$$

и, следовательно,

$$F(z) = \frac{1}{\Xi}\frac{d\Xi}{dz} = \frac{d \ln \Xi}{dz} \tag{41}$$

Возвращаясь к задаче решения уравнения для C, мы видим, что вопрос сводится к совместному решению двух равенств,

$$\begin{aligned} mC &= F(z) \\ \rho NC &= z \end{aligned} \tag{42}$$

Можно, конечно, исключить "лишнее" переменное z. Но тогда восстанавливается исходная неявная функция $mC=F(\rho NC)$, определяющая зависимость C от $\rho$.

Можно, однако, поступить иначе и считать, что эти равенства определяют и $\rho$ и C как функции "униформизующей" переменной z,

$$C = \frac{1}{m} F(z),$$

$$\rho = \frac{m}{N} \frac{z}{F(z)}. \qquad (43)$$

Эти формулы решают задачу отыскания C как функции $\rho$,

$$C = C(\rho), \qquad (44)$$

задавая представление этой функции в параметрической форме.

$$C = C(z), \qquad \rho = \rho(z). \qquad (45)$$

Практическая польза найденного частного решения понятна. Удачным подбором функции $b(x)$ и параметра $m$ можно хорошо аппроксимировать заданное взаимодействие $b(x,y)$. После этого можно действовать обычными методами теории возмущений.

Значительно важнее, однако, факт неединственности уравнения Власова. Поучительно также, что ветвление решений возникает уже в простейшем случае. Это хорошая иллюстрация общего тезиса о многозначности решений в нелинейных задачах.

В книге Власова "Теория многих частиц" (1950) настойчиво подчеркивается факт ветвления решений. Цитата (стр.106):

—

...Метод "ветвления" решений нелинйных интегральных уравнений был впервые дан Ляпуновым в его классических работах по фигурам равновесия вращающейся жидкости, а позднее развивался Шмидтом, Гаммерштейном и другими.

В последнее время (1941) Назаров рассмотрел последовательно теорию ветвления...

—

В нашем случае на мысль о потере единственности наводит уже самый факт параметрического представления решения. Если $\rho$ окажется немонотонной функцией $z$, то обратная функция $z = z(\rho)$ автоматически будет многозначной. Каждой ветви возникшей таким образом многозначной функции,

$$z = z_i(\rho), \tag{46}$$

будет соответствовать ветвь решения C,

$$C = C_i(\rho). \tag{47}$$

Отметим существенное упрощение ситуации по сравнению с той, которая рассмотрена в книге Власова. Имеются т о ч н ы е решения Они заданы в параметрической форме и анализ ветвления сводится просто к анлизу немонотоннсти функции $\rho = \rho(z)$.

Рассмотрим типичную ситуацию, когда $b(y)$ задана на конечном интервале по $y$. В этом случае (а также когда $b(y)$ быстро растет на бесконечности по $y$), $\Phi(z)$ есть аналитическая, более того целая функция комплексного переменного $z$. Тогда $\rho$ есть мероморфная (частное двух целых функций) функция (типа тангенса) от переменного $z$. Можно ожидать, поэтому, появления бесконечного (счетного) числа ветвей обратной функции и, соответственно, счетного числа решений уравнение Власова–Хинчина.

Этот интересный вопрос, равно как и вопрос о связи могозначности с фазовыми переходами, выходит за рамки настоящей публикации.

Мы ограничимся здесь простейшим примером, когда возникает ветвление и появляются три решения уравнения Власова.

## n° 4. Пример дискретной системы.

Кусочно-постоянные функции $b(y)$ часто используются для аппроксимации. Нетрудно убедится, что им соответствует не менее популярный класс функций $\Phi(z)$ – линейные комбинации экспонент:

$$\Phi(z) = \Delta_1 e^{-b_1 z} + \ldots + \Delta_n e^{-b_n z}, \tag{48}$$

правда только с положительными коэффициентами (так как $\Delta$ – это длины отрезков постоянства функции $b$)

Рассмотрим частный случай $n=2$ и положим:

$$b_1 = a+b \qquad b_2 = a-b \tag{49}$$
$$\Delta_1 = \exp(-b) \qquad \Delta_2 = \exp(+b)$$

Несложные выкладки приводят к следующей зависимости $\rho(z)$:

$$\rho(z) = \frac{m}{N} z \frac{\exp(+b[z-1]) + \exp(-b[z-1])}{(a+b)\exp(+b[z-1])+(a-b)\exp(+b[z-1])} \tag{50}$$

Разделив числитель и знаменатель дроби на числитель, получаем более наглядную форму записи функции $\rho(z)$:

$$\rho(z) = \frac{m}{N} \frac{z}{a + b \operatorname{th} [ b (z-1)]} \tag{51}$$

Полагая,

$$b = \theta a, \tag{52}$$

имеем:

$$\rho(z) = \frac{m}{N a} \frac{z}{1 + \theta \operatorname{th} [ b (z-1)]} \tag{53}$$

Перейдем к безразмерной записи функции $\rho(z)$, сохранив, впрочем, обозначение

$$\rho(z) = \frac{z}{1 + \theta \operatorname{th} [ b (z-1)]} \tag{54}$$

Вполне понятны предельные случаи $\theta=0$ или $b=0$ , когда

$$\rho(z) = z \tag{55}$$

Заметим, что через точку $z=1, \rho=1$ проходят кривые при всех значениях параметров $b$ и $\theta$. Вычислим наклон кривой $\rho = \rho(z)$ в этой точке:

$$\rho' = 1 - b\,\theta \tag{56}$$

Поэтому в плоскости параметров $(b, \theta)$ выше гиперболы

$$b\,\theta = 1 \tag{57}$$

лежат кривые $\rho = \rho(z)$, на которых $\rho(z)$ немонотонная функция от $z$.

## Заключение

Показано, что вычисление модельных статистических сумм приводит к решению уравнения Власова-Хинчина:

$$w(\beta, x) = \frac{\int\limits_y b(x,y)\, e^{-\beta\,[a(y) + Nw(\beta,y)]} dy}{\int\limits_y e^{-\beta\,[a(y) + Nw(\beta,y)]} dy} \qquad (w)$$

Логарифм статистической суммы ( в главном по N члене ) записывается в виде

$$\ln Z = S = \frac{\beta N^2}{2} < b(x,y) > + N \ln \Xi(\beta, N) + \ldots \qquad (Z)$$

Входящие в ответ величины $\Xi(\beta,N)$ и $\langle b \rangle$ выражаются через решение $w(\beta,x)$ обобщенного уравнения Власова по формулам:

$$\Xi(\beta, N) = \int\limits_x \exp\{ -\beta\, [a(x) + Nw(x,\beta)] \}\, dx \qquad (\Xi)$$

$$< b(x,y) > = \frac{1}{\Xi(\beta,N)} \int\limits_x w(x,\beta) \exp\{ -\beta\, [a(x) + Nw(x,\beta)] \}\, dx \qquad \langle b \rangle$$

Разобрана простая модель, в которой "внешнее поле" $a(x)$ равно нулю, а "взаимодействие" задается мультипликативной функцией $b(x,y)$:

$$b(x,y) = \frac{1}{m}\, b(x)\, b(y) \qquad (m)$$

Введено также предположение, что функция $b(x)$ – ступенька, (т.е. постоянна на двух соседних отрезках оси x).

Уже в такой (простейшей) модели возникает ветвление решений уравнение Власова-Хинчина. Можно думать, поэтому, что это математическая модель понятия фазового перехода – одного из самых глубоких понятий естествознания. Показательно, что решение получено аналитически и допускает обобщение. Не исключено, что решения такого вида являются канонической формой общих типов ветвления.

Выпишем решение этого полезного примера:

$$w(x,\beta) = C(\beta)\, b(x)$$

Здесь величины $\beta$ и $C(\beta)$ выражены через параметр z:

$$C(z) = \frac{1}{m} F(z),$$

$$\rho(z) = \frac{m}{N} \frac{z}{F(z)}.$$

где функция F(z) зависит от двух безразмерных параметров $(b,\theta)$ и одного масштабного множителя a:

$$F(z) = a \{ 1 + \theta \operatorname{th} [ b (z-1)]\}$$

В плоскости безразмерных параметров $(b,\theta)$ на гиперболе

$$b \theta = 1$$

происходит ветвление решений уравнение Власова-Хинчина.

Ниже этой гиперболы лежат однозначные решения, а выше - многозначные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хинчин А.Я. Математические основания статистической механики Москва, Гостехиздат, 1943

2. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений М.Л. Гостехиздат 1948

3. Власов А.А. Теория многих частиц. Москва, Гостехиздат, 1950

4. Молчанов А.М. Билинейные системы. Препринт НЦБИ АН СССР, Пущино 1982

5. Молчанов А.М. Макродинамика. Препринт НЦБИ АН СССР, Пущино 1984

Историю изучения ветвления можно проследить по дополнительной литературе, которая приведена в книге Власова:

6. Ляпунов А.М. Известия Академии Наук. Петербург, 1906 г.

7. Lichtenstein L. Vorlesungen ueber einige Klassen nishtlinearen Integralgleichungen Berlin, 1931.

8. Назаров Н. Нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна. Узгосиздат, 1941 г.

Т10067. 20.04.87 г. Тир. 350 экз. Зак. 319Р.
Уч.-изд.л. 0,7. Изд. № 153. Бесплатно.

Отпечатано с оригинала-макета на ротапринте в Отделе
Научно-технической информации Научного центра биологических
исследований АН СССР в Пущине